

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Ejercicio nº 1.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 6$$

Ejercicio nº 2.-

Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+2)^2}$$

Ejercicio nº 3.-

Dada la función:

$$y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

- Halla los puntos de corte con los ejes.
- Calcula los máximos y mínimos.
- Representala gráficamente.

Ejercicio nº 4.-

Representa:

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

Ejercicio nº 5.-

Representa gráficamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ejercicio nº 6.-

Representa gráficamente la siguiente función: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Ejercicio nº 7.-

Haz la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

Ejercicio nº 8.-

Obtén los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi] \quad \text{Dibuja su gráfica utilizando la información obtenida:}$$

Ejercicio nº 9.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$y = (x+1)e^x$$

Ejercicio nº 10.-

Representa la función:

$$y = x^2 \ln x$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica:

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$$

Ejercicio nº 12.-

Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

Ejercicio nº 13.-

a) Estudia los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

b) Representala gráficamente.

Ejercicio nº 14.-

Representa gráficamente la función:

$$y = e^{1-x^2}$$

Ejercicio nº 15.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

Ejercicio nº 16.-

Representa la función:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$$

Ejercicio nº 17.-

Representa gráficamente la función:

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 2}$$

Ejercicio nº 18.-

Dada la función:

$$f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos. Utilizando esta información, dibuja su gráfica:

Ejercicio nº 19.-

Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = xe^{x+2}$$

Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

Ejercicio nº 21.-

Estudia y representa la función:

$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$

Ejercicio nº 22.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{4 - x^2}$$

Ejercicio nº 23.-

Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la siguiente función:

$$y = 2 - \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Utilizando la información obtenida, representa la función:

Ejercicio nº 24.-

Estudia y representa:

$$f(x) = x^2 e^x$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$y = \ln(x^2 - 9)$$

SOLUCIONES REPRESENTACIÓN FUNCIONES

Ejercicio nº 1.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 6$$

Solución:

• Dominio = \mathbb{R}

• Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{2} - 4(-x)^2 + 6 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje Y.}$$

• Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 2x^3 - 8x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos singulares: (0, 6); (-2, -2); (2, -2)

• Cortes con los ejes:

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow$ Punto (0, 6)

Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 6 = 0$

$x^4 - 8x^2 + 12 = 0$. Cambio: $x^2 = z$

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} z = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \\ z = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos $(-\sqrt{6}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

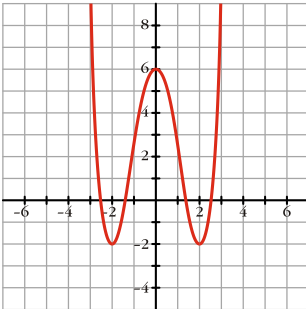
• Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x^2 - 8$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,15$$

Puntos: (-1,15; 1,56); (1,15; 1,56)

- Gráfica:



Ejercicio nº 2.-

Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+2)^2}$$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-4x}{(-x+2)^2}$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

- Asíntota horizontal:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (f(x) < 0 \rightarrow \text{curva por debajo}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (f(x) > 0 \rightarrow \text{curva por encima}) \end{array} \right\} y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{4(x+2)^2 - 4x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{4(x+2) - 8x}{(x+2)^3} = \frac{-4x+8}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x+8 \rightarrow x = 2$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' < 0 \quad f' > 0 \quad f' < 0 \\ \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \\ \quad \quad \quad -2 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; es creciente en $(-2, 2)$.

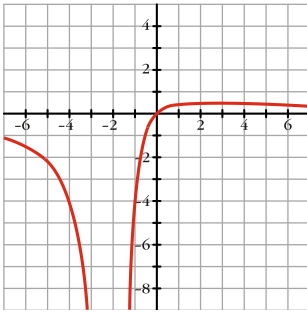
Tiene un máximo en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

- Corte con los ejes:

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

• **Gráfica:**



Ejercicio nº 3.-

Dada la función:

$$y = \text{sen}2x - 2\text{sen}x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

a) Halla los puntos de corte con los ejes.

b) Calcula los máximos y mínimos.

c) Representala gráficamente.

Solución:

a) Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \text{sen}2x - 2\text{sen}x = 0$

$$2\text{sen}x\text{cos}x - 2\text{sen}x = 0 \rightarrow 2\text{sen}x(\text{cos}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \text{sen}x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \text{cos}x - 1 = 0 \rightarrow \text{cos}x = 1 \rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases}$$

Puntos $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.

b) $y' = 2\text{cos}2x - 2\text{cos}x$

$$y' = 0 \rightarrow 2(\text{cos}^2x - \text{sen}^2x) - 2\text{cos}x = 0 \rightarrow 2\text{cos}^2x - 2(1 - \text{cos}^2x) - 2\text{cos}x = 0$$

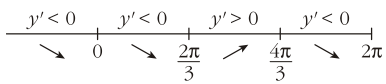
$$2\text{cos}^2x - 2 + 2\text{cos}^2x - 2\text{cos}x = 0 \rightarrow 4\text{cos}^2x - 2\text{cos}x - 2 = 0$$

$$2\text{cos}^2x - \text{cos}x - 1 = 0$$

$$\text{cos}x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \text{cos}x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ \text{cos}x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{cos}x = \frac{-1}{2} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3} \\ \text{cos}x = 1 \rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de y' :

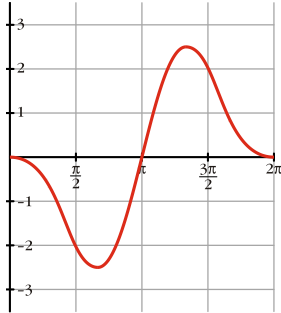


Máximo: $\left(\frac{4\pi}{3}; 2,6\right)$

Mínimo: $\left(\frac{2\pi}{3}; -2,6\right)$

Puntos de inflexión: $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$

c)



Ejercicio nº 4.-

Representa:

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

Solución:

• *Dominio* = $\mathbb{R} - \{1\}$

• *Asíntotas:*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-x-1} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal si $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$)

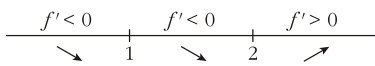
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

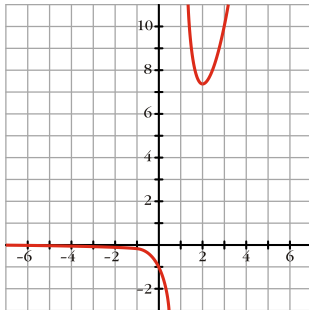
$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(x-2) = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$; es creciente en $(2, +\infty)$. Tiene un mínimo en $(2, e^2)$.

- Corta al eje Y en $(0, -1)$. No corta al eje X .
- Gráfica:



Ejercicio nº 5.-

Representa gráficamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Solución:

- Dominio = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías:

$f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para toda x)

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (no vale)}$$

$f(x)$ no tiene puntos singulares (en $x = 0$ no está definida)

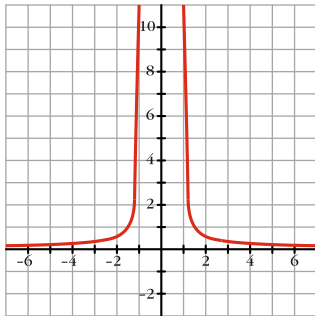
Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad \text{no existe} \quad f' < 0 \\ \hline \nearrow \quad -1 \quad 1 \quad \searrow \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$; y es decreciente en $(1, +\infty)$.

$f(x)$ no corta a los ejes.

- **Gráfica:**



Ejercicio nº 6.-

Representa gráficamente la siguiente función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

Solución:

- **Dominio** = \mathbb{R}

- **Simetrías:**

$$f(-x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares: $(0, 2)$; $(2, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow$ Punto $(0, 2)$

Con el eje X $\rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \rightarrow$

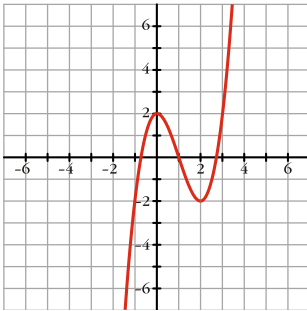
$$\rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2,73 \\ x = -0,73 \end{cases}$$

Puntos (1, 0); (2,73; 0); (-0,73; 0).

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Punto } (1, 0)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 7.-

Haz la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2}$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- Asíntota oblicua:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = x + 3 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = x + 3 \text{ es asíntota oblicua}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (x + 3) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo).}$$

$$f(x) - (x + 3) > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima).}$$

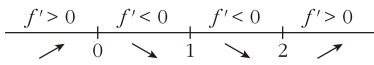
- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x - 1) - (x^2 + 2x - 2)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Puntos (0, 2) y (2, 6).

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$. Tiene un máximo en (0, 2) y un mínimo en (2, 6).

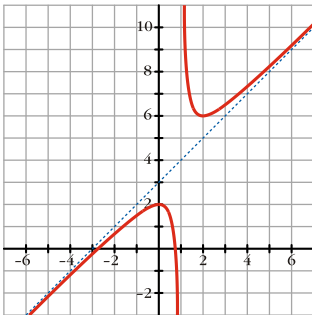
- *Corte con los ejes:*

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow$ Punto (0, 2)

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \begin{cases} x \approx -2,73 \\ x \approx 0,73 \end{cases}$

Puntos: (-2,73; 0); (0,73; 0)

- *Gráfica:*



Ejercicio nº 8.-

Obtén los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \text{sen}^2 x - \text{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Dibuja su gráfica utilizando la información obtenida:

Solución:

- $\text{Dominio} = [0, 2\pi]$
- *Puntos de corte con los ejes:*

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow y = \text{sen}^2 x - \text{sen} x = 0$

$$\text{sen} x (\text{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sen} x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \text{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Puntos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$

- **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}x\cos x - \cos x = \operatorname{sen}2x - \cos x = 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x (2\operatorname{sen}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \\ 2\operatorname{sen}x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = 2\cos 2x + \operatorname{sen}x$ en esos puntos:

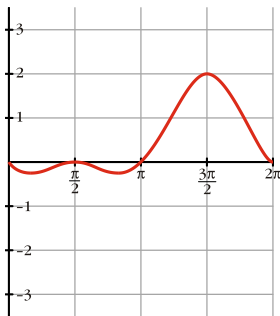
$$f'' < 0 \text{ en } x = \frac{\pi}{2} \text{ y en } x = \frac{3\pi}{2}$$

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$

$$f'' > 0 \text{ en } x = \frac{\pi}{6} \text{ y en } x = \frac{5\pi}{6}$$

Mínimos: $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

- **Gráfica:**



Ejercicio nº 9.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$y = (x+1)e^x$$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R}

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($y < 0$)

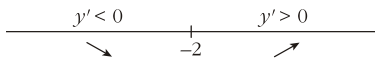
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$y' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$y' = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Signo de y' :



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$; es creciente en $(-2, +\infty)$. Tiene un mínimo en

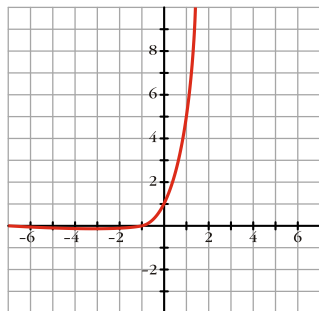
$$\left(-2, \frac{-1}{e^2}\right)$$

- **Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto $(-1, 0)$

- **Gráfica:**



Ejercicio nº 10.-

Representa la función:

$$y = x^2 \ln x$$

Solución:

- **Dominio** = $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \text{ No tiene asíntotas verticales.}$$

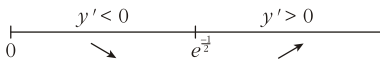
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$y'=0 \rightarrow x(2\ln x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Signo de y' :



$f(x)$ es decreciente en $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y es creciente en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2e}\right)$.

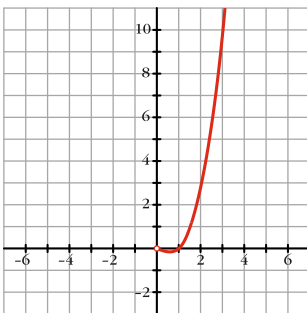
- *Puntos de corte con los ejes:*

No corta al eje Y , pues no está definida en $x=0$.

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^2 \ln x = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Punto } (1, 0) \end{cases}$$

- *Gráfica:*



Ejercicio nº 11.-

Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica:

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$$

Solución:

- *Dominio* = \mathbb{R}

- *Simetrías:*

$$f(-x) = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x = f(x)$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- *Ramas infinitas:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- *Puntos singulares:*

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Puntos: } (-3, 0); \left(-1, \frac{-4}{3}\right)$$

- *Cortes con los ejes:*

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

$$\text{Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow x(x^2 + 6x + 9) = 0 \rightarrow x(x + 3)^2 = 0 \rightarrow$$

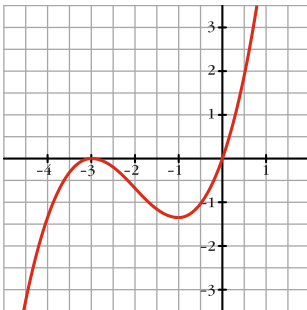
$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \text{ Puntos } (0, 0), (-3, 0)$$

- *Puntos de inflexión:*

$$f''(x) = 2x + 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Punto } \left(-2, \frac{-2}{3}\right)$$

- *Gráfica:*



Ejercicio nº 12.-

Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

Solución:

- *Dominio* = \mathbb{R}

- *Simetrías:*

$$f(-x) = \frac{x^2 + x - 1}{-x - 2}$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Asíntota oblicua:**

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2} \rightarrow y = x + 1 \text{ es asíntota oblicua}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (x + 1) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - (x + 1) > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima)}$$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos (1, 1) y (3, 5).

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & 1 & \searrow & 2 & \searrow & 3 & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$; es decreciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$. Tiene un máximo en (1, 1) y un mínimo en (3, 5).

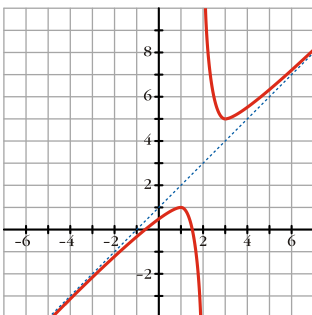
- **Corte con los ejes:**

$$\text{- Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Punto } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \begin{cases} x \approx -0,62 \\ x \approx 1,62 \end{cases}$$

Puntos: (-0,62; 0); (1,62; 0)

- **Gráfica:**



Ejercicio nº 13.-

a) Estudia los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

b) Representala gráficamente.

Solución:

a) • Dominio = $[0, 2\pi]$

• Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

$$\text{Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow y = \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Puntos } (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \text{ y } (2\pi, 0)$$

• Máximos y mínimos:

$$f'(x) = -2\cos x \sin x + \sin x = -\sin 2x + \sin x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \sin x(-2\cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ -2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = -2\cos 2x + \cos x$ en esos puntos:

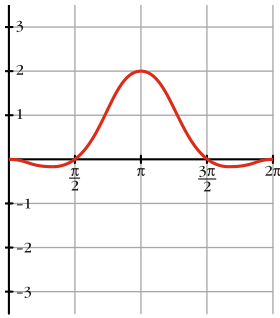
$$f'' < 0 \text{ en } x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

$$\text{Máximos } (0, 0), (\pi, 2), (2\pi, 0)$$

$$f'' > 0 \text{ en } x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{Mínimos } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{-1}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{-1}{4}\right)$$

b) Gráfica:



Ejercicio nº 14.-

Representa gráficamente la función:

$$y = e^{1-x^2}$$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R} .

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (f(x) > 0 \text{ para todo } x)$$

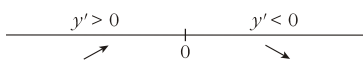
$y = 0$ es asíntota horizontal (la curva está por encima)

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = -2xe^{1-x^2}$$

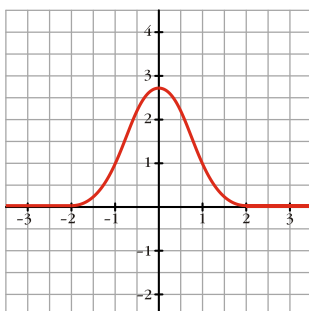
$$y' = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, e)$.

- Gráfica:



Ejercicio nº 15.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

Solución:

- Dominio = $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 3x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$y = -x + \frac{3}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\left(f(x) < -x + \frac{3}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 3x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \frac{-3}{1+1} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$y = x - \frac{3}{2}$ es asíntota oblícua cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\left(f(x) < x - \frac{3}{2} \right)$$

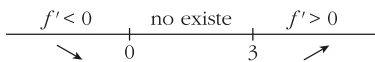
- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (no vale)}$$

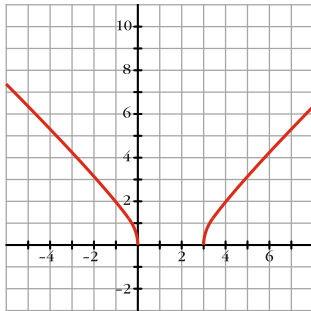
No tiene puntos singulares (en $x = \frac{3}{2}$ no está definida $f(x)$)

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$; es creciente en $(3, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(3, 0)$.
- Gráfica:



Ejercicio nº 16.-

Representa la función:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R}
- Simetrías:

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni al origen.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Puntos singulares: $\left(-1, \frac{7}{3}\right); \left(2, \frac{-20}{3}\right)$

- Cortes con los ejes:

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x = 0$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(2x^2 - 3x - 12) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2 - 3x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+96}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{4} = \begin{cases} x \approx 3,31 \\ x \approx -1,81 \end{cases} \end{cases}$$

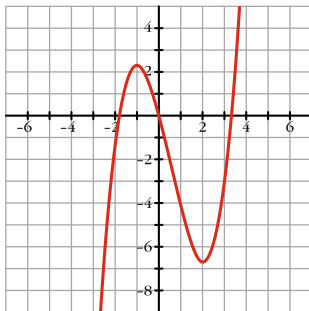
Puntos: $(0, 0)$; $(-1,81; 0)$; $(3,31; 0)$

- *Puntos de inflexión:*

$$f''(x) = 4x - 2$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{6}\right)$$

- *Gráfica:*



Ejercicio nº 17.-

Representa gráficamente la función:

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 2}$$

Solución:

- *Dominio* = \mathbb{R}

- *Simetrías:*

$$f(-x) = \frac{-2x^3}{x^2 + 2} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen}$$

- *No tiene asíntotas verticales.*

- *Asíntota oblicua:*

$$y = \frac{-2x^3}{x^2 + 2} = 2x - \frac{4x}{x^2 + 2} \rightarrow y = 2x \text{ es asíntota oblicua}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 2x > 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por encima).

$f(x) - 2x < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo).

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+2) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 - 4x^4}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^4 + 12x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^4 + 12x^2 = 2x^2(x^2 + 6) = 0 \rightarrow x = 0$$

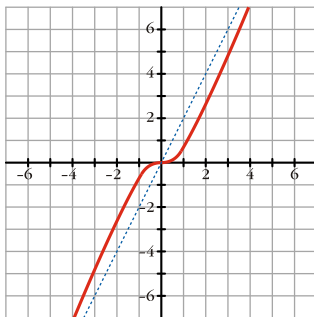
$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0 \rightarrow f(x)$ es creciente. (Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$).

- **Corte con los ejes:**

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- **Gráfica:**



Ejercicio nº 18.-

Dada la función:

$$f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos. Utilizando esta información, dibuja su gráfica:

Solución:

- **Dominio** = $[0, 2\pi]$

- **Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 1 - \operatorname{tg} x = 0$

$$\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \text{Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

- **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1$$

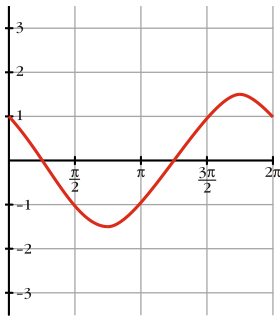
$$x = \frac{3\pi}{4}, \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = -\cos x + \sin x$ en esos puntos:

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0 \rightarrow \text{Mínimo en } \left(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

$$f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0 \rightarrow \text{Máximo en } \left(\frac{7\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

• **Gráfica:**



Ejercicio nº 19.-

Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = xe^{x+2}$$

Solución:

• **Dominio** = \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^{x-2}} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal si $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = e^{x+2} + xe^{x+2} = (1+x)e^{x+2}$$

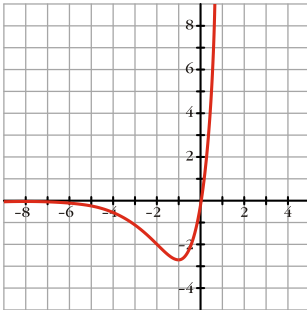
$$f'(x) = 0 \rightarrow 1+x=0 \rightarrow x=-1$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{c} f' < 0 \qquad \qquad f' > 0 \\ \hline \swarrow \qquad \qquad \quad \searrow \\ \qquad \qquad -1 \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$; es creciente en $(-1, +\infty)$. Tiene un mínimo en $(-1, -e)$.

- Corta a los ejes en $(0, 0)$.
- Gráfica:



Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

Solución:

- Dominio:

$$x^3 + 3x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x + 3) \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$\text{Dominio} = [-3, +\infty)$$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

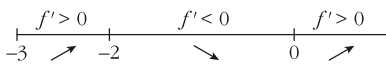
- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = -2 \end{cases}$$

En $x = 0$ y en $x = -3$ no existe $f'(x)$, pues se anula el denominador.

Signo de $f'(x)$:

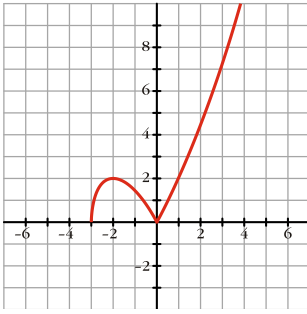


$f(x)$ es creciente en $(-3, -2) \cup (0, +\infty)$; es decreciente en $(-2, 0)$. Tiene un máximo en $(-2, 2)$. Tiene un mínimo en $(0, 0)$ (aunque no sea derivable en este punto).

- Puntos de corte con los ejes:

Corta a los ejes en $(-3, 0)$ y en $(0, 0)$.

- Gráfica:



Ejercicio nº 21.-

Estudia y representa la función:

$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R} .

- Simetrías:

$$f(-x) = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos singulares: (0, 1); (-1, 0); (1, 0)

- Cortes con los ejes:

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow \text{Punto } (0, 1)$$

$$\text{Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\text{Cambio: } x^2 = z \rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos (-1, 0) y (1, 0).

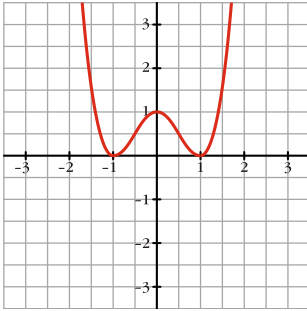
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x)=0 \rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0,58$$

Puntos $(-0,58; 0,44)$ y $(0,58; 0,44)$

• **Gráfica:**



Ejercicio nº 22.-

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{4 - x^2}$$

Solución:

• **Dominio** = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{x^2 + 1}{4 - x^2} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y$$

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Asíntota horizontal:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal}$$

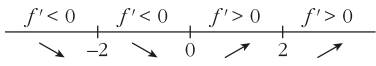
Si $x \rightarrow -\infty$ y si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1 \rightarrow$ la curva está por debajo de la asíntota.

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x(4 - x^2) - (x^2 + 1) \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3 + 2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{10x}{(4 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

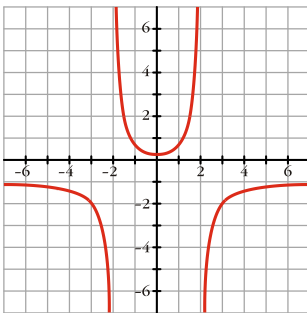
- *Corte con los ejes:*

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=\frac{1}{4} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow$ No corta al eje X

Puntos $(-0,62; 0)$; $(1,62; 0)$.

- *Gráfica:*



Ejercicio nº 23.-

Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la siguiente función:

$$y = 2 - \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Utilizando la información obtenida, representa la función:

Solución:

- *Dominio* = $[0, 2\pi]$
- *Puntos de corte con los ejes:*

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow$ Punto $(0, 2)$

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow 2 - \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 2 \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$
 \rightarrow No tiene solución. No corta al eje X .

- *Máximos y mínimos:*

$$y' = -2\operatorname{sen}x\cos x = -\operatorname{sen}2x$$

$$y' = 0 \rightarrow -2\operatorname{sen}x\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $y'' = -2\cos 2x$ en esos puntos:

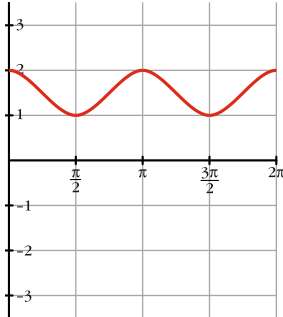
$y'' < 0$ en $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Máximos: $(0, 2)$; $(\pi, 2)$; $(2\pi, 2)$

$y'' > 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Mínimos: $(\frac{\pi}{2}, 1)$; $(\frac{3\pi}{2}, 1)$

• Gráfica:



Ejercicio nº 24.-

Estudia y representa:

$$f(x) = x^2 e^x$$

Solución:

• Dominio = \mathbb{R}

• Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > 0$)

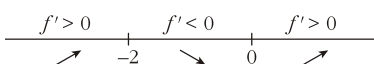
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

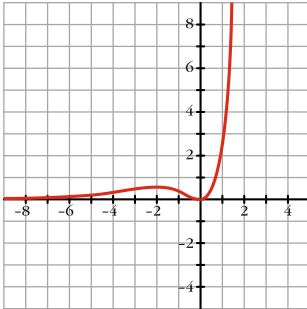
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; es decreciente en $(-2, 0)$. Tiene un máximo en

$\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo en $(0, 0)$.

- Corta a los ejes en $(0, 0)$.
- Gráfica:



Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$y = \ln(x^2 - 9)$$

Solución:

- Dominio = $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
- Simetrías:

$f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

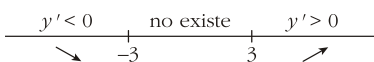
- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (no vale)}$$

No tiene puntos singulares (en $x = 0$ no está definida $f(x)$).

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$; y es creciente en $(3, +\infty)$.

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \ln(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{10}$

Puntos: $(-\sqrt{10}, 0); (\sqrt{10}, 0)$

No corta al eje Y , pues $f(x)$ no está definida en $x = 0$.

- *Gráfica:*

